第 26 講　空間ベクトル

26　四面体 OABC に関して，辺 OA を 2：1 に内分する点を D，辺 OB の中点を E，直線 AE と直線 BD の交点を F，線分 FC の中点を G，直線 OG と底面 ABC の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC は共有点をもつか．もたない場合にはその理由を記せ．また，共有点をもつ場合はその共有点を P として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(4)　四面体 OABC が正四面体であるとして，点 H から 3 点 O，A，B を通る平面へ下ろした垂線の足を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　空間ベクトル

26　次の各問いに答えよ．

(1)　正の数 a に対し，空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\quad \mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$$

を考える．$\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ が成り立つとき，a の値を求め，点 A から 3 点 O，P，Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする（ただし，$m>0$，$n>0$ とする）．このとき，点 P，Q，R，S が同一平面上にあるための m，n の満たす関係式を求めよ．また線分 PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=\dfrac{1}{3}$，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{18},\ \dfrac{1}{18}\right)$　㋑　$a=2$，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

㋒　$a=1$，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

(2)　㋐　$2m=n$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$　㋑　$m=n$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

㋒　$m=2n$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　空間ベクトル

26　四面体 OABC に関して，辺 OA を 2：1 に内分する点を D，辺 OB の中点を E，直線 AE と直線 BD の交点を F，線分 FC の中点を G，直線 OG と底面 ABC の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC は共有点をもつか．もたない場合にはその理由を記せ．また，共有点をもつ場合はその共有点を P として $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(4)　四面体 OABC が正四面体であるとして，点 H から 3 点 O，A，B を通る平面へ下ろした垂線の足を I とするとき，$\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

【答】 (1) $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$

(3) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$　(4) $\overrightarrow{OI}=\frac{10}{21}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

【解答】

(1)　点 D は辺 OA を 2：1 に内分するので $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ と表せ，E は辺 OB の中点より

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ と表せる．

F は直線 AE 上の点より実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}$$

と表せ，また F は直線 BD 上の点より実数 u を用いて

$$\overrightarrow{OF}=(1-u)\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}u\overrightarrow{OA}+(1-u)\overrightarrow{OB}$$

と表せる．

よって，$1-t=\frac{2}{3}u$ かつ $\frac{1}{2}t=1-u$　　$\therefore$　$t=\frac{1}{2}$，$u=\frac{3}{4}$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}}$

(2)　G は線分 FC の中点より $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ と表せる．

H は直線 OG 上の点より実数 v を用いて $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}v\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}v\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}v\overrightarrow{OC}$ と表せ，

また H は底面 ABC 上の点より $\frac{1}{4}v+\frac{1}{8}v+\frac{1}{2}v=1$　　$\therefore$　$v=\frac{8}{7}$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC が共有点をもつとし，その点を P と仮定すると，P は直線 AC 上の点より実数 w を用いて

$$\overrightarrow{OP}=(1-w)\overrightarrow{OA}+w\overrightarrow{OC}$$

と表せ，また P は平面 DEG 上の点より，和が 1 となる 3 つの実数 x，y，z を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OE}+z\overrightarrow{OG}\\&=x\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+y\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+z\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)\\&=\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}z\right)\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}z\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と表せるので

$$\begin{cases}1-w=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}z\\[2mm]0=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{8}z\\[2mm]w=\dfrac{1}{2}z\\[2mm]x+y+z=1\end{cases}$$

を満たす実数 x，y，z，w が存在する．

　この 4 式より $x=0$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=\frac{4}{3}$，$w=\frac{2}{3}$ を得る．よって直線 AC と 3 点 D，E，G を通る平面は共有点をもち，これらの値より　$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}}$

(4)　OABC が正四面体より，一辺の長さを $2a$ とおくと $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2a$ であり，すべての面が正三角形より $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$ となるので

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{3}=2a\times2a\times\frac{1}{2}=2a^2$$

を得る．同様に $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2a^2$

　ここで I は平面 OAB 上の点より，実数 α，β を用いて $\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ と表せるが，HI⊥OA より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{OA}&=(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}-\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{2}{7}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=2a^2\left(2\alpha+\beta-\frac{9}{7}\right)=0\end{aligned}$$

となるので　$2\alpha+\beta=\frac{9}{7}$　……①　を得る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

またHI⊥OBより同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{7}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=2a^2\left(\alpha+2\beta-\frac{8}{7}\right)=0$$

となるので　$\alpha+2\beta=\frac{8}{7}$　……②　を得る.

①と②より $\alpha=\frac{10}{21}$, $\beta=\frac{1}{3}$ となるので　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{10}{21}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　空間ベクトル

26　次の各問いに答えよ．

(1)　正の数 a に対し，空間内の4点

$$O(0,\ 0,\ 0),\quad A(0,\ 0,\ 1),\quad P(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0),\quad Q(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$$

を考える．$\angle OPQ=\dfrac{\pi}{3}$ が成り立つとき，a の値を求め，点Aから3点O，P，Qを通る平面に下ろした垂線の足Hの座標を求めよ．

(2)　四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおき，線分OAを $m:n$ に内分する点をP，線分BCを $m:n$ に内分する点をQ，線分COを $m:n$ に内分する点をR，線分ABを $m:n$ に内分する点をSとする（ただし，$m>0$，$n>0$ とする）．このとき，点P，Q，R，Sが同一平面上にあるための m，n の満たす関係式を求めよ．また線分PQ，RSの交点をGとして，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【選択肢】

(1)　㋐ $a=\dfrac{1}{3}$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{18},\ \dfrac{1}{18}\right)$　㋑ $a=2$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

㋒ $a=1$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

(2)　㋐ $2m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$　㋑ $m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

㋒ $m=2n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\overrightarrow{PO}=(-2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{PQ}=(-\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PQ}|\cos\frac{\pi}{3}$$

$$4a^2=2\sqrt{2}a\sqrt{7a^2+1}\times\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{2}a=\sqrt{7a^2+1}\quad(a>0\text{ より})$$

$$8a^2=7a^2+1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=1}$$

よって，$P(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$Q(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$ となるので，実数 α，β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OQ}\\&=\alpha(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)+\beta(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)\\&=(2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta,\ \sqrt{5}\beta,\ \beta)\end{aligned}$$

と表すことができる．

このとき $AH\perp OP$ かつ $AH\perp OQ$ となるが，$\vec{e}=(1,\ 0,\ 0)$ とおくと $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\vec{e}$ であるから

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{e}=0$　より　$(2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta,\ \sqrt{5}\beta,\ \beta-1)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$

$$2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta=0 \qquad \therefore\ 2\alpha+\beta=0$$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$　より　$(2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta,\ \sqrt{5}\beta,\ \beta-1)\cdot(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)=0$

$$2(2\alpha+\beta)+5\beta+(\beta-1)=0 \qquad \therefore\ 4\alpha+8\beta=1$$

よって　$\alpha=-\dfrac{1}{12},\ \beta=\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=(\sqrt{2}(2\alpha+\beta),\ \sqrt{5}\beta,\ \beta)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{H}\left(\mathbf{0},\ \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{6}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right)$$

(2)　$\dfrac{m}{m+n}=u,\ \dfrac{n}{m+n}=v$ とおくと $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}=-u\vec{a}+v\vec{b}+u\vec{c}\\ \overrightarrow{PR}=-u\vec{a}+v\vec{c}\\ \overrightarrow{PS}=(v-u)\vec{a}+u\vec{b}\end{cases}$　と表せる．

4 点が同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}\quad\cdots\cdots①$$

を満たす実数 α，β が存在する．上記 3 式と①から

$$\begin{aligned}(v-u)\vec{a}+u\vec{b}&=\alpha(-u\vec{a}+v\vec{b}+u\vec{c})+\beta(-u\vec{a}+v\vec{c})\\&=-(\alpha+\beta)u\vec{a}+\alpha v\vec{b}+(\alpha u+\beta v)\vec{c}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases}v-u=-(\alpha+\beta)u & \cdots\cdots②\\ u=\alpha v & \cdots\cdots③\\ 0=\alpha u+\beta v & \cdots\cdots④\end{cases}$$

を得る．③により $\alpha=\dfrac{u}{v}\left(=\dfrac{m}{n}\right)$ を②の $\alpha+\beta=\dfrac{u-v}{u}\left(=\dfrac{m-n}{m}\right)$ へ代入すると

$$\frac{m}{n}+\beta=\frac{m-n}{m} \qquad \therefore\ \beta=1-\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)$$

このとき④より

$$\frac{m^2}{n}+n-\frac{n^2}{m}-m=0 \quad \text{すなわち} \quad (m-n)(m^2+n^2)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=n}$$

また，$m=n$ より $u=v=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\vec{b} \qquad \therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}$$

よって PRQS は平行四辺形より PQ と RS の交点 G は PQ の中点

$$\therefore\ \overrightarrow{PG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathbf{OG}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\vec{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\vec{\boldsymbol{c}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。